Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 04.05.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 3

Definition 1. *$(X, \leq)$ ist eine partielle Ordnung wenn $\leq$ auf X reflexiv, transitiv und antisymmetrisch (d.h. X erfüllt $\forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ ist. Sei $S_{po} = \{\leq\}$ die Sprache der partiellen Ordnungen. Sei nun X ein S_{po}-Modell. Gilt $x \leq y$ für x, y in X, so sagen wir auch x liegt unter y oder y liegt über x. Sind x, y in X und gilt weder $x \leq y$, noch $y \leq x$, so sagen wir dass x und y unvergleichbar sind. Ist $x \leq y$ und $x \neq y$, so nennen wir x einen Vorgänger von y. Ist y Vorgänger von x und gibt es keinen Vorgänger z von x so dass y Vorgänger von z ist, so sagen wir dass y direkter Vorgänger von x ist.*

Aufgabe 1: (3 Punkte) Formulieren Sie folgende S_{po}-Aussagen zuerst in der erweiterten Sprache mit den zusätzlichen Symbolen $\{\exists, \vee, \wedge, \leftrightarrow\}$ und dann in der nicht-erweiterten Sprache.

(a) Die Vorgänger jedes Elements (der Ordnung) sind linear geordnet.
(b) Über jedem Element gibt es zwei unvergleichbare Elemente.
(c) v_0 hat einen direkten Vorgänger.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Finden Sie ein konkretes Beispiel für ein S_{po}-Modell, welches die Axiome für partielle Ordnungen und die beiden Sätze aus Aufgabe 1 erfüllt. Geben Sie an, welche Elemente Ihres Modells die dritte Aussage aus Aufgabe 1 erfüllen.

Aufgabe 3: (2 Punkte) Sei S eine Sprache. Beweisen Sie dass für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ und Formeln φ und ψ in L^S gilt:

(a) $\mathfrak{M} \models (\varphi \vee \psi)$ gdw $\mathfrak{M} \models \varphi$ oder $\mathfrak{M} \models \psi$.
(b) $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)$ gdw $\mathfrak{M} \models \varphi$ und $\mathfrak{M} \models \psi$.
(c) $\mathfrak{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ gdw $\mathfrak{M}(\varphi)$ und $\mathfrak{M}(\psi)$ gleich sind.
(d) $\mathfrak{M} \models \exists v_n \varphi$ gdw es $a \in |\mathfrak{M}|$ gibt so dass $\mathfrak{M}\frac{a}{v_n} \models \varphi$.

Aufgabe 4: (3 Punkte) Sei $S_{Ar} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik und $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung der Standardstruktur der natürlichen Zahlen durch Belegung von Variablen (d.h. $\mathfrak{M}$ ist ein S_{Ar}-Modell mit $\mathfrak{M}(\forall) = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}(+) = +_{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{M}(\cdot) = \cdot_{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{M}(0) = 0_{\mathbb{N}}$ und $\mathfrak{M}(1) = 1_{\mathbb{N}}$). Wir betrachten die folgenden Aussagen.

(a) $\mathfrak{M}(v_0) > \mathfrak{M}(v_1)$.
(b) $\mathfrak{M}(v_0)$ teilt $\mathfrak{M}(v_1)$.
(c) $\mathfrak{M}(v_0)$, $\mathfrak{M}(v_1)$ und $\mathfrak{M}(v_2)$ sind paarweise teilerfremd.
(d) $\mathfrak{M}(v_0)$ ist eine Primzahl.
(e) $\mathfrak{M}(v_0)$ ist ein Gegenbeispiel zur Goldbach-Vermutung.
(f) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

Formalisieren Sie diese Formeln durch S_{Ar}-Formeln, d.h. geben Sie S_{Ar}-Formeln $\varphi_1, \ldots \varphi_6$ an, so dass $\mathfrak{M} \models \varphi_i$ jeweils den obigen Aussagen entspricht.

Definition 2. *Sei S eine Sprache und $\mathfrak{A}$ eine S-Substruktur von $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch Belegung von Variablen, so ist $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ die Funktion mit Definitionsmenge $\{\forall\} \cup S \cup Var$, welche $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \upharpoonright (\{\forall\} \cup S) = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \upharpoonright Var = \mathfrak{M} \upharpoonright Var$ erfüllt.*

Aufgabe 5: (2 Punkte) Seien $S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ wie in obiger Definition gegeben. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{B}$ durch Belegung von Variablen ist und $\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(t)$ für jeden S-Term t gilt.